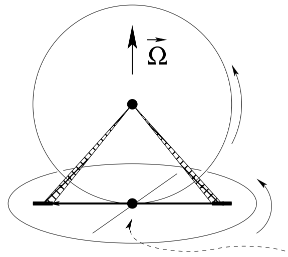
## ÜBERLAGERTE KREISBEWEGUNGEN, NEWTON-GLEICHUNGEN

Überlagerte Kreisbewegungen zeigen sehr schön ein wichtiges Prinzip in der Physik: oft lassen sich komplizierte Probleme als Summen aus einer Reihe einfacherer Probleme beschreiben, für die die Lösungen leicht berechnet werden können.
Die Newtonsche Bewegungsgleichung "'Kraft gleich Masse mal Beschleunigung" ist der einfachste Typ einer sehr allgemeinen Form von Gleichungen, aus denen man die zeitliche Entwicklung eines physikalischen Systems, also insbesondere die Bahnkurven der Teilchen, berechnen kann.

**[H7]** *Überlagerte Kreisbewegungen* **[$2+1+1+2=6$ Punkte]**

Auf dem Schützenfest wird folgende Attraktion geplant: Ein Riesenrad mit Radius $R$ und Winkelgeschwindigkeit $\omega$ wird auf ein Karussell montiert, das mit Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ rotiert. Der Fahrgast in einer Gondel des Riesenrades folgt einer Raumkurve $\vec{r}(t) = R\vec{e}_3 + R\Big(\sin\omega t\,\vec{f}(t) - \cos\omega t\,\vec{e}_3\Big)$. Hierbei legen $\vec{e}_3$ und $\vec{f} = \begin{pmatrix}\cos\Omega t\\ \sin\Omega t\\ 0\end{pmatrix}$ die momentane Riesenrad-Ebene fest. Die nebenstehende Skizze verdeutliche ein wenig den Aufbau.




Startposition

(a) Bilden Sie $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ und $\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$. Berechnen Sie daraus die Betragsquadrate $v^2$ der Geschwindigkeit und $a^2$ der Beschleunigung.

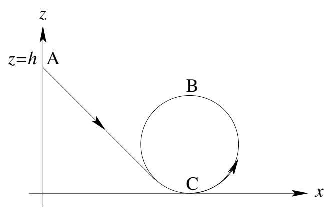
(b) Vereinfachen Sie die Betragsquadrate aus (a) so, dass Sie den Ausdrücken direkt ansehen können, zu welchem (frühesten) Zeitpunkt und wo (Ortsvektor!) die maximale Geschwindigkeit erreicht wird. Wie groß ist sie? Ist das Resultat plausibel?

(c) Wo und unter welchen Umständen ist die größte Beschleunigung zu ertragen? *Hinweis*: Hier ist eine Fallunterscheidung sinnvoll.

(d) Prüfen Sie nach, ob $\vec{v}(t) = (\vec{\omega}(t) + \vec{\Omega}(t)) \times (\vec{r}(t) - \vec{r}_0)$, wobei für $\vec{r}_0$ ein Punkt zu wählen ist, der auf *beiden* Drehachsen liegt.

**[H8]** *Looping* **[4 Punkte]**

Ein Körper startet mit $v_0 = 0$ vom Punkt A $(z = h)$ auf der in Figur gezeigten reibungsfreien Looping-Gleitbahn. Wie groß sind Geschwindigkeit und Beschleunigung in den Punkten B und C der Kreisbahn mit dem Radius $R$? Wie groß darf das Verhältnis $R/h$ höchstens werden, damit der Körper in B nicht herunterfällt? Wie groß ist dann die Geschwindigkeit $v_{\min}(B)$?



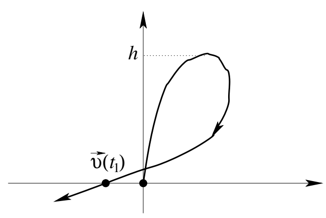

**[H9]** *Fussball* **[$2+2+1=5$ Punkte]**

Ein Fussball der Masse $m$ startet bei $\vec{r}(0) = \binom{0}{0}$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}(0) = \binom{0}{v_0}$. Bei bögigem Seitenwind wirkt zusätzlich zur Erdanziehung noch die Kraft $\vec{F} = mg\binom{1-\alpha t}{0}$ mit $\alpha = \frac{3g}{2v_0}$ auf den Ball.

(a) Zu welcher Zeit $t_0$ erreicht der Ball seine größte Höhe $h$ und wie groß ist $h$?

(b) Zu welcher Zeit $t_1$ und an welcher Stelle $x(t_1)$ landet er wieder auf dem Spielfeld? Welche Geschwindigkeit $\vec{v}(t_1)$ hat er dann?

(c) Korrigieren Sie mit Ihren Ergebnissen die nebenstehende Skizze.




*Hinweis*: Die Newton-Gleichung ist hier unter Beachtung der Anfangsbedingungen komponentenweise zu lösen. Die Zeiten $t_0$ und $t_1$ erhält man aus $\dot{y}(t_0) = 0$ bzw. $y(t_1) = 0$.

### HINWEIS

**Bitte geben Sie unbedingt auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an!**